Concours ITAsession 2016

Composition : Mathématiques 7 (algèbre, analyse)

Durée : 2 Heures

I ALGEBRE

Soit IR^3, l'espace vectoriel sur IR muni de sa base canonique $B=(e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de IR^3 défini par : $f(x ; y ; z)= (2x+2y+z ; x+3y+z ; x+2y+2z)$.

1/a) Déterminer A la matrice de f relativement à la base B. (N.B. : Toute matrice plaquée ne sera pas prise en compte).

b) Déterminer le noyau et l'image de f.

c) f est-il un automorphisme de IR^3 ? Justifier.

2)a) Calculer $f(u)= (1 ; 1 ; 1)$ et en déduire une valeur propre de f.

b) Déterminer les autres valeurs propres de f.

c) f est-il diagonalisable ? Justifier.

3) on donne $u_1=e_1+e_2+e_3$; $u_2=-2e_1+e_2$; $u_3=-e_1+e_3$.

a) Montrer que $B'=(u_1 ; u_2 ; u_3)$ est une base de IR^3.

b) Déterminer P la matrice de passage de B à B'.

c) Déterminer A' la matrice de f dans la base B'.

4) Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 2y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + 2y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

II ANALYSE : les parties A/ et B/ sont indépendantes

A/ Avant de partir au marché Clémence possède 1200 F de plus que sa camarade Solange. Au marché, elles dépensent chacune 3600 F. Clémence possède alors deux fois plus d'argent que Solange. De quelles sommes d'argent disposaient-elles avant d'aller au marché ?

B/ Soit la fonction f définie par $f(x)=x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

1/Trouver le domaine de définition de f.

2/f est-elle prolongeable par continuité ? Si oui, étudier sa dérivabilité en 0.

3/f est-elle continue, dérivable en -1 ?

4/ Etudier le comportement de f en $\pm\infty$. Déterminer ses asymptotes et leurs positions relatives par rapport à la courbe représentative de f.

5/ En déduire l'allure de la courbe représentative de f.